PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA: PROBLEMÁTICA DE SEUS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

ALMOULOUD, Saddo Ag – PUC-SP – saddoag@pucsp.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: CNPq

Introdução

Teoremas, provas, demonstrações, raciocínio dedutivo, será que se dá ênfaze a esses aspectos da matemática nos Ensinos Fundamental e Médio? E de que maneira? Antes de tentarmos responder a essas questões, devemos formular outras, como, por exemplo: Qual o nível de compreensão que professores da rede pública possuem a respeito desses processos matemáticos, como teoremas, provas e deduções? Os professores conseguem distinguir com clareza uma demonstração de uma generalização? Estas e tantas outras questões foram e são ainda preocupações de pesquesquisadores em Educação Matemática. O trabalho que apresentamos está inserido nestas preocupações.

Desenvolvemos um projeto de pesquisa que tem por objetivo investigar os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem envolvendo o raciocinio dedutivo em matemática. Essencialmente, investigamos os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem envolvendo provas e demonstrações em matemática nas séries finais do ensino fundamental, assim como estudar as representações dos professores destas séries no que diz respeito ao papel do racicionio dedutivo na formação do aluno. Assim, o projeto foi desenvolvido em torno das seguintes questões a serem pesquisadas: Quais fatores influenciam no processo ensino-aprendizagem envolvendo o raciocinio dedutivo em matemática? Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações? Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores no que diz respeito às provas e demonstração em matemática?

O objetivo deste trabalho é apresentar uma reflexão sobre prova e demonstração em matemática e discutir alguns resultados sobre um conjunto de atividades envolvendo o raciocinio dedutivo, realizadas por professores de Ensino Fundamental.

Reflexão sobre prova e demonstração

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para o ensino fundamental (PCN-EF) enfatizam a importância da demonstração em matemática, procurando dar orientações para o estudo de teoremas pelos alunos, com posterior *demonstração* formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho. A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, mas que ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficiente para a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

Pesquisadores como Boero (1996), discutem o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de 8ª série. Na pesquisa deste autor, o problema consiste em verificar que a maioria dos alunos neste nível de escolaridade pode produzir teoremas (conjecturas e provas) se eles forem colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:

- durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;
- durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas ("argumentos") produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

Além de trabalhos que procuram melhor compreender o raciocínio lógico, nos deparamos com outros que buscam uma melhor compreensão do que vem a ser uma prova matemática. Usualmente, consideramos a *demonstração* como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Adotamos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff (1982).

A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração.

As *provas* são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e questiona se seria possível um consenso a respeito de prova em matemática, confrontando as colocações de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (apud BALACHEFF, 2004, p.13) a respeito das funções da prova:

> (i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação
>
> (ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das conseqüências de uma hipótese, absorvendo um fato novo numa nova estrutura e permitindo uma nova percepção.

O autor destaca, ainda, perspectivas radicalmente diferentes de epistemologias de provas matemáticas que fazem uma grande diferença, como, por exemplo, prova como tipo de comprovação universal e exemplar ou início de uma natureza idiossincrática no núcleo da matemática, ou como instrumento necessário da matemática, ou, ainda, como algo que adquire seu significado das aplicações ou como um campo autônomo da matemática. A falta de clareza dessas diferenças pode tornar-se obstáculo nas pesquisas, contribuindo para gerar uma situação de impasse para o pesquisador.

No entanto, Balacheff (2004, p.13) destaca que existem pontos em comum nas epistemologias de prova matemática que podem facilitar a busca de alguns elementos comuns a essa prova como:

> (i) reconhecimento de que a origem da racionalidade matemática, ao menos sob a perspectiva da aprendizagem, é construída sobre e contra um tipo de racionalidade baseada no "senso comum", apoiada numa cultura histórica, moral e de adesões religiosas, em práticas sociais e profissionais de uma comunidade; (ii) a existência de uma profunda relação entre argumentação e prova a natureza da qual é o objeto de um debate ou pelo menos deve ser transformado num problema; (iii) a prova deveria ser considerada à luz da teoria e da prática; (iv) reconhecimento de que a matemática como um conteúdo gera dificuldades específicas para serem superadas ou , ao contrário, para ser construída com o surgimento de um significado de prova matemática; (v)o professor desempenha um papel chave tanto como um animador acidental ou como um facilitador necessário. (nossa tradução).

Nesse artigo, ainda completa: "*Entre todos esses aspectos, surpreendentemente, um não aparece: a relação entre prova e linguagem, provar e redigir uma prova*".

Balacheff (1988) identifica os seguintes níveis de prova entre as provas pragmáticas e as provas conceituais:

- *Empirismo ingênuo:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
- *Experimento Crucial:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar.
- *Exemplo Genérico:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
- *Experimento de pensamento:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

De Villiers (2002) comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Mas ele alerta que a demonstração tem outras funções em matemática:

i) **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;

ii) **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;

iii) **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;

iv) **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;

v) **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;

vi) **Sistematização**: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Analisando as causas do fracasso no ensino-aprendizagem da demonstração em matemática, Duval (1995) diz que ela envolve uma atividade cognitiva especifica e que sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Ela é um modo de processamento cognitivo autônomo com características especificas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, a interpretação. De um lado, ela articula os enunciados em função do estatuto que lhe é reconhecido e não em função de seu significado; por outro lado, ela se faz em progressão por substituição de enunciados e não pelo encadeamento. A aprendizagem da demonstração, para Duval, consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. A tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso.

Sem dúvida alguma, as discussões a respeito de provas e demonstrações são inúmeras e extensas uma vez que o tema pode ser abordado sob diversas óticas. No entanto, admitimos que a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados e que o conjunto organizado desses fatos deve comprovar de forma irrefutável algum tipo de proposição matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada.

Parsysz (2000), estudando os processos e mecanismos relacinados com o ensino e aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental, propós uma classificação que considera os objetos em jogo, físicos ou teóricos e os modos de validações, perceptivo ou dedutivo. Como Geometrias não-axiomáticas, o autor apresenta G0-Geometria Concreta e G1-Geometria Spatio-gráfica. Em G0 os estudos geométricos são realizados a partir de atividades concretas como maquetes, plantas e dobraduras. Na Geometria Spatio-Gráfica (G1) ainda se confunde Geometria e realidade; os alunos podem conjecturar e fazer constatações de propriedades, empiricamente. Quanto às Geometrias axiomáticas, Parsysz as classifica como: Geometria Proto-Axiomática (G2) e Geometria Axiomática (G3). Em G2, ocorre a concepção de um esquema da realidade em que as definições fazem sentido e os resultados passam a ser validados com técnicas dedutivas. Ainda nesse nível, a figura construída em G1 tem status de figura genérica e a dedução é reconhecida como ferramenta de validação no interior de um sistema axiomático. Em G3, não se faz referência à realidade e a Geometria é totalmente explicada (ou abstrata). Trabalhando em G3, o aluno é capaz de situar-se nos diferentes sistemas axiomáticos, bem como compará-los.

Parsysz (2000) considera que nessa articulação entre os níveis G1 e G2 a gestão do salto conceitual entre elas é um elemento essencial na problemática do ensino obrigatório da Geometria, devendo ser fixados os conceitos em jogo e sua articulação.

Nessa articulação, Fetissov (1997) e Arsac (1987) relevam a importância de apresentar a limitação das validações empíricas e de questionar a evidência da figura. Concordamos com Fetissov (1997) quando recomenda explicações de termos, de técnicas e lógicas empregadas em uma demonstração. Balacheff (1987) releva a importância da demonstração como único meio de legitimar uma hipótese matemática.

Um estudo que versa sobre uma das questões de nosso projeto analisou livros didáticos do início dos anos 1990 e do início dos anos 2000. O objetivo foi investigar como, em cada época, as coleções de livros didáticos acompanharam as discussões da Didática da Matemática no que se refere ao ensino-aprendizagem da Geometria dedutiva e sobre as diferenças dessas apropriações nas duas épocas. Os resultados da análise das coleções escolhidas mostram, que, no início dos anos 1990, a geometria era apresentada no final dos livros e sob enfoque dedutivista, ou seja, a grande maioria das demonstrações geométricas era apenas apresentada aos alunos, seguida de exercícios de aplicação das propriedades. Nas coleções de livros didáticos dos anos 2000, há indícios para a apropriação do enfoque empírico e heurístico. Apresentam situações cujo objetivo seria incentivar o aluno a conjecturar e a descobrir heuristicamente, demonstrações de propriedades geométricas. Como o professor usa o livro didático também como fonte para sua formação continuada (formação em exercício), pode-se supor que existe um certo impacto nessa mudança de enfoque nos livros didáticos na prática desses docentes.

Metodologia e procedimentos metodológicos

1. Organização geral da pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de problema coletivo (o ensino e aprendizagem da matemática via demonstração) e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema são envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 1998).

O trabalho realizado direcionou-se em quatre fases: a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática; a análise do processo ensino-aprendizagem envolvendo provas e demonstração, a análise das concepções dos estudantes e professores, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; a análise do campo no qual vai se situar a realização efetiva de um cenário didático. Todas estas etapas se desenvolvem, logicamente, pautadas pelos objetivos específicos de nossa investigação.

Temos a preocupação de trabalhar com professores e pensamos que não se faz a formação de um docente como um mero treinamento individual, mas sim com o desenvolvimento de uma comunicação e da expressão dos diversos membros. A reflexão gerada nesse processo possui uma representação social que se vincula com outras realidades educativas-sociais, devido às diferenças entre os membros, para construir redes de intercambio e de transformação (COMUZZI, 2002). Essa pesquisa foi concebida de forma a contribuir na formação do professor, no sentido de Garcia (1999, p.26):

> A Formação de professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se implicam individualmente ou em equipa, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objectivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem.

A presença simultânea e integrada dos meios de comunicação social e as novas tecnologias vem ajudar a formação docente, permitindo a orientação de um novo educador. Um Fórum em um Ambiente Virtual de ensino e aprendizagem tem um papel importante para o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de reflexão a respeito da ação e das concepções dos professores no processo de formação contínua.

Nosso projeto de pesquisa é norteado pelas seguintes etapas:

1. Diagnosticar concepções iniciais dos professores que pretendem participar do processo de formação em situações envolvendo provas e demonstrações, por meio de mapa conceitual e entrevista estruturada.
2. Com base nos resultados e nos estudos didático-epistemológicos, elaborar um conjunto de situações que foram desenvolvidas com os professores.
3. Orientar os professores na elaboração, análise e aplicação de um conjunto de atividades para ser desenvolvido com seus alunos. Realizamos, neste sentido, discussões nesse processo tanto no presencial quanto no Fórum do Ambiente Virtual.
4. Diagnosticar possíveis mudanças de concepções e da prática pedagógica dos professores, por meio de mapa conceitual, entrevistas e de acompanhamentos em sala de aula e no Ambiente virtual.
5. Analisar as produções escritas e orais dos professores e os testes aplicados aos seus alunos, fazendo uso de software de tratamento de

dados estatísticos.

6. analisar o papel do raciocinio dedutivo nas abordagens de alguns livros didáticos de matemática do 3º e 4º cicle do Ensino Fundamental.

2. Organização do trabalho realizado com os professores

Para este projeto, organizamos o desenvolvimento do trabalho com os professores em dois momentos:

- Os encontros de segunda-feira, nos quais o grupo de pesquisadores e alunos da pós-graduação, discutem a fundamentação e os aspectos teóricos da pesquisa e da formação dos professores.
- Os encontros de formação propriamente dita, que acontecem com dois grupos de professores voluntários: às quintas-feiras, das 14h às 17h e às sextas-feiras das 8h às 11h.

Durante o segundo semestre de 2005 e todo o ano de 2006, nos encontros de segunda-feira, direcionamos os trabalhos para as leituras de embasamento teórico para a condução do projeto. Dentre elas, destacamos: Pedemonte (2002); Balacheff (2004), Godino (1997) e Boero (1996). Os textos eram previamente enviados aos participantes pela lista de discussão geral do grupo para que todos os participantes pudessem participar mais ativamente das discussões teóricas. Desta forma, a cada texto buscava-se identificar quais os pontos relevantes para a análise teórica da parte experimental do projeto, ou seja, das oficinas que ocorriam nas quintas e sextas feiras com os professores voluntários, em um processo de reflexão que relacionava a teoria à prática vivenciada pelo grupo no objetivo de transformar fatos observados em fenômenos didáticos.

Participavam dessas reuniões não apenas os pesquisadores, mas também alunos de mestrado e doutorado, assim como outros professores que já haviam concluído seu mestrado na Instituição e que atuavam como colaboradores no projeto, seja como observadores nas oficinas, seja como pesquisando novos textos e outras publicações que poderiam fazer evoluir a pesquisa. .

Para o grupo de professores participantes, foi passado um questionário de identificação e diagnóstico, a respeito do conhecimento de demonstração dos sujeitos da pesquisa.

Decidiu-se adotar, enquanto procedimento de formação, a elaboração de material de apoio pelo qual os professores pudessem refletir sobre as situações apresentadas e propor possíveis soluções em discussões coletivas.

Visando coletar os dados para o desenvolvimento dessa pesquisa de acordo com a metodologia escolhida, os dois grupos contaram com observadores, que tomavam nota e audio-gravavam os diálogos dos professores durante as sessões, e com formadores cujo papel era o de organizar e mediar as sessões de formação de profesores de Ensinos Fundamentale Médio que participam do projeto.

3. Discutindo alguns resultados da dinâmica de formação adotada

No que segue relatamos as atividades desenvolvidas nos dois grupos, durante o primeiro semestre de 2006. Os relatos serão apresentados em separado, já que as aspirações e indagações dos sujeitos participantes tiveram diferenças e, portanto, os encontros foram organizados de modo diferenciado, sem, no entanto, fugir aos objetivos fixados para o projeto.

Nos premeiros encontros realizados nas sextas-feiras, o foco das reflexões foi concentrado no questionário diagnóstico que fora aplicado, tendo em vista fornecer, aos professores participantes, um primeiro retorno em relação aos problemas abordados, até por solicitação dos próprios integrantes do grupo. Durante os encontros, os professores em formação foram divididos em grupos. De uma forma geral, a turma era organizada em dois grupos, já que alguns participantes abandonaram o projeto, enquanto outros foram agregados, mantendo uma média de sete participantes, sendo que cinco deles se mantiveram durante todo o primeiro semestre do projeto; pelo menos dois observadores estiveram presentes em cada encontro, para garantir um em cada grupo de estudo, além das gravações em áudio.

Nos encontros seguintes, as pesquisas, reflexões e discussões tiveram como tema o que é a demonstração em matemática. Pesquisas na Internet, dicionários e livros didáticos, além da leitura do texto de Pedemonte (2002), permitiram que as noções de argumentação, prova e demonstração, bem como as de conjectura, hipótese e tese fossem temas de discussão.

Em um dos textos que orientaram nosso trabalho, Ilbanes e Ortega (2001), constatou-se que a interpretação dos alunos em relação aos termos hipótese e tese podem ser categorizadas em: metodologia científica, lógico matemático, linguagem usual e acadêmico. No trabalho com os professores, pudemos observar que essas diferentes interpretações dos termos hipótese e tese também foram evidenciadas no grupo, acarretando confusões na hora de descriminar hipótese e tese em cada situação proposta. Esse fato nos alertou para a necessidade de dar atenção especial, a cada novo problema, na identificação de tais elementos, nas diferentes situações de condição necessária e/ou suficiente, como sugerem os referidos autores.

Em relação aos termos argumentação, prova e demonstração, as discussões possibilitaram que eles chegassem ao consenso de que a argumentação é uma etapa anterior à demonstração, com idas e vindas, erros e acertos, e que, posteriormente, ao organizar as informações pertinentes em uma seqüência, obtém-se a demonstração. Embora nosso objetivo seja diferenciar prova e demonstração, as discussões e as leituras não foram suficientes para tal, nesse primeiro momento. Para o grupo, ainda, provar é o mesmo que demonstrar.

Nos encontros subseqüentes, os trabalhos foram direcionados para as análises didáticas e matemáticas dos demais problemas que compunham o questionário. Inicialmente, os sujeitos discutiram e buscaram soluções matemáticas para os problemas, em pequenos grupos, para posterior socialização, discussão e institucionalização.

Dessa forma, pôde-se trabalhar na identificação da hipótese e tese, em situações de implicação e equivalência, na necessidade e suficiência da exibição de um contra-exemplo para demonstrar a não validade de uma afirmação, além da demonstração por indução finita, sugerida pelas discussões do grupo na análise de um dos problemas propostos no questionário. Ressaltamos que nenhum dos sujeitos conhecia tal método e que as atividades foram assim planejadas pela formadora, que também fez a institucionalização de modo a tornar esse conhecimento disponível no grupo, nos termos de Robert (1998). Os problemas permitiram que temas como: critério para verificar se um número é primo, progressão aritmética (definição, temo geral e soma) e decomposição em fatores primos, entre outros, fossem abordados em seus aspectos matemático e didático.

Entrou também em discussão a necessidade e importância da justificativa fundamentada em definições, propriedades e teoremas, na construção de uma demonstração.

No mês de junho de 2006, foi disponibilizada aos professores uma série de atividades sobre a demonstração em geometria que foram trabalhadas na seqüência com os grupos. Com essas atividades pretendeu-se retomar discussões sobre demonstrar, conjeturar, hipótese, tese, além de iniciar um trabalho de diferenciação na interpretação de termos como: qualquer que seja, para todo, existe, existe pelo menos um, entre outros.

O uso de medidas no levantamento de conjecturas e a sua não validade como demonstração, além das conjecturas errôneas que as figuras imprecisas podem ocasionar foram temas de discussão provocados pelas atividades propostas até o final das atividades durante o primeiro semestre de 2006.

Quanto ao grupo de quinta-feira, a maioria dos professores não participou de nenhum grupo de estudos anteriormente. Nas discussões iniciais do segundo encontro, os professores manifestaram o interesse em discutir algumas situações do questionário que responderam e trabalhar com Análise Combinatória. Todos afirmavam ter dificuldades para ensinar o assunto, entre as quais a distinção entre arranjo e combinação na resolução de problemas.

Atendendo aos anseios de discussão dos professores dedicamos os encontros de março de 2006 para discutir algumas situações do questionário aproveitando para observar o que entendiam a respeito de demonstração e poder decidir a continuidade do trabalho com esse grupo. Optamos por continuar o trabalho com Análise Combinatória, no intuito de mostrar a importância de atividades que solicitam a generalização de casos particulares como parte do desenvolvimento do raciocínio indutivo. De acordo com Polya (1995, p. 92), "*a generalização por tentativas parte de um esforço para compreender os fatos observados, baseia-se na analogia e é verificada por meio de outros casos particulares*". Procuramos mostrar aos professores, utilizando o material disponibilizado[1], e ainda de acordo com Polya (1995, p. 93) "*que muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental.*"

---

[1] Material intitulado *"Iniciação à demonstração em geometria"*, contendo dez atividades

Assim, utilizamos o referido material e trabalhamos com Análise Combinatória nos encontros de abril, maio e junho. No final, os professores afirmaram entender melhor esse conteúdo e perceberam o equívoco didático no uso das fórmulas apresentadas nos livros didáticos pois elas facilitavam as demonstrações mas não a resolução de problemas (ou seja, não necessariamente a mobilização do raciocinio multiplicativo e raciocínio combinatório adequadamente). Podemos inferir que os professores perceberam a importância de trabalhar o conceito e que as fórmulas serviam para generalizar os modelos que seriam utilizados na resolução dos problemas combinatórios.

Como exemplo, analisamos uma das atividades iniciais, realizada com uma dupla de professoras (que denominamos P1 e P2). Essa dupla foi composta por duas professoras da rede pública que atuam tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio. Uma das professoras tem formação em administração de empresas e a outra em tecnologia de processamento de dados, ambas com complementação em licenciatura em matemática.

Nessa atividade em questão, a professora coordenadora do grupo colocou à disposição dos professores livros didáticos das diversas séries do Ensino Fundamental II, de vários autores. A tarefa consistia em identificar qualquer tipo de demonstração e discutir a viabilidade de ensino dessa demonstração em sala de aula. Antes de a dupla escolher um livro, houve um debate no qual percebemos que uma das grande dificuldades era saber o que é uma demonstração, conforme registramos:

> P1: Demonstração é como chegou àquilo?
>
> P2: Vou lhe dar um exemplo. É como se faz para chegar a uma equação, você diz o que significa o x, acredito que é isso ...

Após essa pequena discussão, selecionaram um livro de 6ª série e começaram a folhear aleatoriamente procurando uma demonstração. Tinham muita dificuldade em identificar se o que estavam lendo tratava mesmo de uma demonstração. Nesse caso, o texto em questão consistia num problema com vários potes de vidro contendo balas e etiquetas indicando, por exemplo, +2 (2 balas foram acrescidas ao pote) ou -3 (3 balas foram retiradas do pote); inicialmente, os potes estavam todos com 20 balas. As questões eram todas relacionadas com o acréscimo e retirada das balas. A professora P2 leu o enunciado do problema em voz alta, argumentando com a colega que se tratava de um problema e não de uma demonstração e passaram a discutir a resolução do mesmo, até que a professora P1 convenceu-se de que não era uma demonstração e exclamou: "*então siga em frente*". E continuaram folheando o livro mais um pouco. Desistiram e pegaram outro livro. Ao se depararem com um problema de pesos que incluía figuras de balanças a professora P2 disse: "*isto, sim, é uma demonstração a respeito de pesos. Tratam de peso maior e menor*". No entanto, desistem de se aprofundar nessa "demonstração", uma vez que na escola em que trabalham não existem balanças, o que inviabiliza a reprodução da referida "demonstração". A professora P2, a fim de ilustrar para a colega o que vem a ser uma demonstração, relata como desenvolveu sua aula, no período da manhã, para chegar à fórmula que calcula as coordenadas do ponto médio de um segmento e no final questiona: "*demonstração não é como eu cheguei a essa fórmula?*" A professora P1 retruca: "*falado é uma coisa, tem que manusear o concreto, que é melhor*".

Passam a discutir o ensino de números relativos, concordando que nem os alunos do ensino médio sabem, por exemplo, adicioná-los. Dessa forma, optam por eleger o problema das balas nos potes como um exemplo de demonstração e iniciam uma discussão de como fariam para apresentá-lo na sala de aula. Decidem que o mais adequado seria pedir para que os alunos trouxessem vidros vazios de maionese e, aí, passam a discutir o que colocar nos vidros. Enfim, decidem que o melhor seria pedir tampinhas de garrafas para os alunos e, além disso, eles também deveriam providenciar selinhos para colar no vidro indicando se faltam ou sobram tampinhas, por exemplo, indicando -5 ou +10. Uma vez que o material estivesse completo, a professora pediria para que cada aluno montasse uma "continha" retratando a situação do seu pote. Uma outra dinâmica da aula seria realizar essa atividade em grupo. As professoras P1 e P2 utilizam o restante do tempo procurando mais demonstrações em outros livros e finalizam com comentários do tipo:

> P2: Penso que demonstração é a fórmula geral.
>
> P1: Para mim, demonstração é quando eu mostro para que serve alguma coisa, como a equação do 2º grau, que se mostra como chegou na equação. Também é preciso se ver o objetivo, uma hora para que serve e outra como se resolve.

Encerra-se o tempo destinado à busca de demonstrações nos livros didáticos e as professoras estão muito curiosas para saber o que realmente vem a ser uma demonstração. A formadora da turma passa, então, à segunda parte da atividade em que cada dupla deve relatar para o grupo o que identificou como demonstração, e o grupo deve pronunciar-se se também reconhece o exemplo como uma demonstração.

As professoras P1 e P2 relatam o exemplo dos potes de vidro com tampinhas e argumentam tratar-se de uma demonstração, pois o aluno deverá realizar adição de números positivos e números negativos. Após a explicação das professoras, a formadora indaga à classe se o que foi relatado é uma demonstração e as respostas obtidas são as seguintes:

> - Acho que é uma experimentação, uma ilustração e não uma demonstração.
> - Não é demonstração porque não é teorema.
> - para ser demonstração tem que ser algo generalizado.

A partir dos comentários feitos pelas professoras e pela escolha do "exemplo" de demonstração, torna-se evidente que a idéia que possuem sobre este objeto de estudo está associada a algo que evidencie o que se está pretendendo ensinar, como o caso da adição e subtração de números relativos por meio das balas colocadas nos potes de vidros. Para elas, demonstração tem a ver com contextualização, no sentido de que se criando uma situação problema em que o fato matemático se torne compreensível, então o fato está demonstrado. Tais afirmações nos mostram também a grande preocupação atual de se dar um sentido prático a tudo que se faz em matemática, transparecendo que só tem valor o que se pode aplicar de imediato numa situação cotidiana. O compreensível passa a ser apenas aquilo que pode ser usado no dia-a-dia, isto é, um conhecimento de uso imediato. As professoras têm consciência de não ter uma certeza absoluta do que vem a ser uma demonstração, mas possuem uma "intuição" que vem ao encontro do que Harel & Sowder (1998, p.42) colocam: *"O esquema de provar do sujeito consiste em averiguar e convencer-se a si próprio (...).Como definido, o averiguar e o persuadir são totalmente subjetivos e podem variar de sujeito para sujeito e de geração para geração, numa mesma civilização"*.

Além disso, a busca pela compreensão comprovada do fato matemático aliada a uma aplicabilidade imediata leva as professoras a confundir demonstração com dedução de fórmulas como foi o caso mencionado por uma delas de haver "demonstrado" pela manhã a fórmula do ponto médio. Na realidade, a professora deduziu a fórmula que permite calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento, no plano utilizando uma representação gráfica como apoio a suas explicações. Declarações como "penso que demonstração é a fórmula geral", mostram a falta de clareza que possuem a respeito de prova matemática, dedução, generalização.

As professoras envolvidas nessa pesquisa tinham uma dificuldade inicial em reconhecer uma demonstração em matemática. A questão é muito anterior à construção de uma prova. As professoras sentiam carência de um determinado tipo de conhecimento que as levasse a identificar um texto matemático que viesse a ser uma demonstração. Nessa atividade de busca de uma demonstração em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio, ficou evidente essa dificuldade de reconhecimento de prova quando buscavam aleatoriamente nos livros, através de uma visualização de formato de texto matemático, identificar uma prova. Em geral, detinham-se em textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração.

Nesse trabalho, fica nítida a dificuldade que as professoras possuíam em identificar uma prova matemática, no entanto, parecem ter clareza de que a função da prova é esclarecer e deixar comprovado, de forma contundente, algum resultado matemático. Essa percepção que possuem a respeito de provas e demonstrações está fortemente ligada ao entendimento de Balacheff (1982) a respeito de explicação, de prova e demonstração.

Certamente, as professoras participantes dessa pesquisa a respeito do raciocínio dedutivo, durante o processo de formação continuada, terão a oportunidade de rever e ampliar suas concepções relativas a provas e demonstrações em matemática, no decorrer do desenvolvimento do projeto, o que, conseqüentemente, terá reflexo nas suas práticas pedagógicas indo, portanto, ao encontro de seus anseios.

Com o decorrer do trabalho, notamos que esses professores adquiriram uma certa autonomia no que diz respeito à discussão, argumentação, redação, levantamento de hipóteses e demonstração. As discussões e entrevistas que realizamos, revelaram que o trabalho desenvolvido junto aos professores tem contribuído para sua formação, seu comprometimento com o trabalho pedagógico e, fundamentalmente, mostram uma certa motivação para o desenvolvimento deste projeto.

Este trabalho mostra, sobretudo, a necessidade de criar condições que promovam mudanças nas concepções e nos saberes dos professores a respeito de prova e demonstração, bem como nas linguagens utilizadas, a fim de prepará-los para proporcionar aos seus alunos condições que lhes permitem raciocinar, argumentar, provar e demonstrar. Neste sentido, desenvolvemos atividades em que os professores percebam a necessidade destes processos para o ensino, com base em conteúdos presentes no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. Etnografia da prática escolar. Campinas: Papirus, 1995.

ARSAC, G. L'origine de la dèmonstration: essai d'Épistémologie didactique. Recherches en Didactique des Mathémtiques, V. 8, n. 3, p. 267-312, 1987.

BALACHEFF, Nicolas. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, Nicolas. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109, 2004.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

BOERO, Paolo... et al. Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In: INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. Proceedings of the 20th PME Conference… Valencia: University of Valencia, 1996. v. 2, p. 113-120.

DUVAL, R. Régistres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, vol. V, p. 37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

FETISSOV, A. I. A demonstração em Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual ,1997

GARCIA, Carlos Marcelo. Formação de professores: para uma mudança. Portugal: Porto, 1999. p. 271. (Coleção Ciências da Educação Século XXI, 2).

IBANES, M. J.; ORTEGA, T. Interpretación cognitive de los enunciados de los teoremas. Quadrante. v. 10 n. 2, 2001.

LAKATOS, I. A lógica do descobrimento matemático – provas e refutações, Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PEDEMONTE, B. Argumentation et démonstration: comparaison entre les deux structures, in Dorier, J.-L.; Artaud, M.; Berthelot, R.; Floris, R. (eds) Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage, 2002

POLETTINI, Altair F. F. Mudança e desenvolvimento do professor – o caso de Sara. Revista Brasileira de Educação, São Paulo, n. 9, p. 88-98, 1998.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência, 1995. 196p.

ROBERT, A. Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée à l´Université. Recherche em Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 18, nº 2, p. 139-190, 1998

THIOLLENT, M. Metodologia da pesquisa-ação. 8. ed. São Paulo: Cortez, 1998.