UMA ABORDAGEM EPISTEMOLÓGICA DO CÁLCULO

Lígia Arantes Sad
(Profª do Programa de Pós-Graduação em Educação – UFES)

RESUMO

Este artigo centra-se na produção de significados e conhecimentos a partir do Cálculo, tendo como motivo principal a preocupação em contribuir para a compreensão do desenvolvimento do pensamento diferencial e integral do estudante de 3º grau. A fundamentação teórica e a investigação histórico-epistemológica têm como base a teoria de conhecimento proposta pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), a partir do qual procedem as análises dos dados da pesquisa de campo, mostrando não só a sua adequação mas, principalmente, apontando diferentes modos de produção de significados, objetos e conhecimentos em relação ao Cálculo. São destacadas as conseqüências imediatas sobre as posturas e procedimentos pedagógicos de professores e alunos como um meio de refletirem ao produzirem seus próprios conhecimentos.

INTRODUÇÃO

Como principal objetivo retrataremos uma análise epistemológica de aspectos do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Inicialmente propomos uma questão geradora para iniciarmos as reflexões e encaminhamentos: "*São estabelecidas diversificações nos modos de produção de significados e de objetos a partir do Cálculo? Quais ?*". [1]

Devemos observar que os *significados* a que essa pergunta se refere, são significados matemáticos constitutivos de certos modos de produção do pensamento, bem como de seus objetos. Além disso, a referência de *diversificação* nos modos de produção de significado é feita em relação aparente a um "mesmo" objeto produzido (por exemplo, diferencial de uma variável *x*, " *dx* ") e simbolicamente representado em uma proposição lingüística de mesma aparência, mas que contudo, pode produzir diferentes significados. Portanto, para responder à questão geradora, entre outras coisas devemos investigar qual a

[1] Este artigo tem por base a Tese de Doutorado de Lígia Arantes Sad, junto ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Campus de Rio Claro – SP, 1999.

natureza desses objetos de que se fala. A partir de que são produzidos (de qual(is) significado(s), de quais outros objetos ou princípios)? Realmente existe diversificação nos modos de produção de significados ou são meras metáforas ou mimeses de um mesmo objeto? Em que modos de produção de significados e conhecimentos geralmente estão centrados os embates entre os pontos de vista de quem aprende e de quem ensina?

Pensar a respeito de perguntas como essas não é nada comum no âmbito acadêmico dos professores de matemática de terceiro grau, ainda mais refletir considerando que os significados não estão no texto matemático, nas coisas da matemática ou nas pessoas, mas em suas relações perpassadas pelas falas. Assim, a gênese dessa investigação tendo como fonte o ensino e aprendizagem das noções fundamentais do Cálculo, não nega a importância de estarmos imersos no contexto das questões e correlações com outros problemas sociais, inclusive os da própria formação do professor. O convívio de vários anos nas salas de aula dos mais diversos cursos que necessitam dessa parte da Matemática nos coloca em contato direto com esse complexo de questões, que é também denunciado no alto índice de reprovação e de desistência nessa disciplina no início dos cursos de graduação.

Voltando-nos em especial às evidência epistemológicas, observamos que em meio ao processo de ensino de Matemática no terceiro grau é comum escutar entre professores: "*os objetos do Cálculo são sempre os mesmos, embora se fale sobre eles com algumas diferenças de tratamento*", ou mesmo "*Cálculo é Cálculo, embora as aplicações se diversifiquem*". Isso reforça a crença de que os objetos matemáticos ensinados e aprendidos são entendidos como sendo constituídos de modo independente do estudante, do professor, do livro texto ou de outra tecnologia utilizada, como se fossem meras interpretações de um mesmo (existente e único) objeto. Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo no terceiro grau problematizam a apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões. Encontramos, por exemplo, no trabalho de Tall (1991) que, abordagens correntes para o ensino superior tendem a proporcionar aos alunos o <u>produto</u> do pensamento matemático, enquanto o <u>processo</u> do pensar matemático é relegado. Não se costuma focalizar, de um modo geral, a trajetória completa do pensamento matemático avançado[2] desde o ato criativo de considerar o contexto do problema que leva à formulação de conjecturas, à constituição das afirmações e justificações, ao estágio final de refinamentos, resultados e provas.

É crucial portanto estabelecer que, ao considerarmos a matemática uma criação humana, um texto de linguagem específica, ela é parte integrante do nosso contexto (sócio-cultural-ideológico) e os *significados*[3] são produzidos a partir dela pelos alunos e professores ao utilizarem-se do discurso matemático acadêmico em meio às atividades. O livro texto de Cálculo concebemos como <u>resíduos das enunciações</u>, um enunciado matemático para o aluno, que o transforma em enunciação segundo uma demanda por parte de seus *interlocutores*, que ocasiona a escolha de certos *modos de produção de significado* para as *crenças-afirmações e justificações* e, são, de modo particular, classificadas como um <u>conhecimento matemático</u> do aluno.

Em grupos mais seletos, como o de estudantes de Cálculo, observamos, por exemplo, que, se tomarmos o discurso de que os reais formam um corpo ordenado completo e fizermos a associação comum com pontos sobre uma "linha numérica", observamos que alguns estudantes vêem, como implicação, que não existe "lugar" para colocar mais nenhum número: a linha numérica é completa.[4] Em particular, os estudantes não aceitam que se "engorde" a linha numérica e se englobem os hiper-reais e que, assim, ela possa conter os infinitésimos como dentro da análise não-standard. Outros entendem a "completude" como um resultado técnico, que adiciona os pontos limites de seqüências de Cauchy de números racionais, sendo perfeitamente possível colocar os números reais em um conjunto numérico maior, incluindo os infinitésimos e números infinitos, os hiper-reais. Mas, por exemplo, Cantor negou a existência de infinitesimais, baseando-se na não-

---

[2] Tall (1991, p. 20) diz que muitos dos processos (transição e reconstrução mental, generalização e abstração, intuição, rigor, análise e síntese) do pensar matemático avançado podem ser encontrados em um nível mais elementar, e o que faz a passagem do pensar matemático elementar para o avançado é a transição do *descrever* para *definir* e de *convencer* para *provar*, de um modo lógico baseado nas definições tomadas. "*Esta transição de coerência da matemática elementar para a conseqüência da matemática avançada, basea-se em entidades abstratas as quais o indivíduo precisa construir através de deduções das definições formais.*"

[3] Significado, segundo o MTCS, é o *"**conjunto de coisas que se pode falar e efetivamente se diz a respeito de um objeto*** (Lins, 1997b, p. 145).

[4] Isso também foi detectado em outras pesquisas, como a de Sierpinska (1987) e a de Cornu (1983).

possibilidade de calcular o inverso de um número infinito em sua teoria de cardinais infinitos.[5]

O próprio tratamento com o *infinito* fornece uma diversidade que, através da filogênese, podemos observar desde Arquimedes. O *infinito* foi um significante na matemática que teve articulado a vários *significados*, cuja produção se deu de diferentes modos. Ora como infinito real (ou atual), ora como infinito potencial, e outros mais.

Embora o símbolo **¥** tenha sido usado por muitos matemáticos desde Wallis, seu significado variou. Weierstrass, por exemplo, usava **¥** significando potencialidade e uma "realidade". Ele escreveu: f(a) = **¥** para significar que $\frac{1}{f(a)} = 0$, e f(∞) = b para representar que o limite de f(x), para x muito grande, era b.

Cantor, talvez para evitar confusões, escolheu o símbolo ω para representar o infinito real agregado aos inteiros positivos, de acordo com o que ele chamou, em sua teoria, de potência de um conjunto infinito de elementos, e com isso pode representar um número transfinito de potência superior.

Mas, como bem escreve Boyer (1959), o fato da cardinalidade de um conjunto poder ser infinito, junto à definição de variável contínua, foi o bastante durante algum tempo, aos conceitos do Cálculo; ou seja, os fundamentos eram remetidos a conjuntos numéricos de inteiros, finitos e infinitos, sem precisar entrar nas dificuldades inerentes ao infinito real (como, mais tarde, fez-se na análise não-standard). O rigor lógico, finalmente, (con)venceu e concretizou a constituição desse modo de produção dos fundamentos que matemáticos, como Weierstrass, Dedekind, Cantor e outros, ajudaram a estabelecer para o Cálculo.

Assim, não há um verdadeiro e absoluto modo de pensar sobre Matemática, de constituir seus significados e seus objetos, como historicamente também pudemos evidenciar[6]. Mesmo argumentando sob o ponto de vista do desenvolvimento na prática (por exemplo, em sala de aula) de uma teoria matemática, que parece obedecer a certos componentes: uma linguagem, um conjunto de afirmações aceitas, um conjunto de questões

[5] Ver TALL (1991, p. 6).

aceitas e um conjunto de visões metamatemáticas (incluindo modelos de provas e definições),[7] podemos observar que esses componentes têm variações. Em certos grupos sociais onde é trabalhado e produzido um conhecimento matemático avançado,[8] e em cujos grupos existe uma maior convergência em relação às experiências anteriores dentro da Matemática, é de se esperar pouca ou até por vezes nenhuma diversificação dos modos de produção de significado a partir da Matemática.

UM MODELO TEÓRICO PROPÍCIO

Ao apoiar-nos no Modelo Teórico dos Campos Semânticos – MTCS , tomamos como um de nossos objetivos não somente utilizá-lo em nossas análises, mas mostrar a sua adequacidade às nossas investigações.

Este modelo começou a ser concebido por R.C. Lins a partir de sua tese de doutoramento em Educação Matemática — *A framework for understanding what algebraic thinking is* — concluída na University of Nottingham (UK) em 1992. [9] Após 1994, tem servido como fundamentação teórica a alguns pesquisadores em Educação Matemática.

A seguir comentamos sobre alguns aspectos e características epistemológicas cruciais deste modelo (MTCS).

Um aspecto de destaque é o tratamento dispensado ao que se refere a ***conhecimento***. Diferentemente de outras teorias de conhecimento que ressaltam a natureza do conhecimento, tipos de conhecimento, processo de conhecer e vários outros significantes correlatos em relação a conhecimento,[10]porém sem chegar, ou chegando de modo difuso, a

---

[6] Maiores referências da análise histórico epistemológica podem ser encontradas em Sad (1999, p.159).

[7] Cf. KITCHER (1984, apud Tall, 1991, p. 56).

[8]Aqui estamos tratando, de modo bem simplista, um conhecimento matemático como 'avançado' se as suas afirmações e justificações precisam considerar uma matemática pelo menos de nível universitário. Porém em seus estudos sobre o assunto, Tall (1991, p.3) afirma que, o ciclo de atividades do pensar matemático avançado pode ser visto como aquele que a partir do ato criativo de considerar um determinado problema, contextualizado na investigação matemática, conduz à formulação de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova.

[9] Nos Anais do XVIII PME (Lisboa, 1994), ele publicou o artigo *Eliciting the meanings for algebra produced by students: knowledge, justifications and semantic fields*, no qual já discute alguns dos aspectos do referido modelo epistemológico. Em junho de 1994, publicou na revista *Dynamis* (Blumenau, v.1, n.7) o primeiro artigo enfatizando o modelo, entitulado: *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico.* Desde então, esse modelo tem sido implementado e divulgado por seu autor.

[10] Algumas referências de autores e suas falas sobre conhecimento podem ser lidas em Sad (capítulo 2, 1998).

falar o que é, afinal, conhecimento, o MTCS propõe de início, uma definição: ***conhecimento*** = (crença-afirmação, justificação)

Ou seja, *conhecimento* tem por elementos constitutivos uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação. O que nos faz estar diante de um *sujeito do conhecimento*, ou seja, de uma existência interdependente e intrínseca do conhecimento a partir do sujeito, e também, do sujeito do conhecimento (produtor assujeitado). Começamos então a evidenciar *conhecimento* como algo dinâmico, do domínio da fala[11], da enunciação [12] e que, uma vez admitido, nos permite afirmar alguns pontos importantes em termos epistemológicos.

Nenhum texto ou enunciado — que são resíduos de enunciações — contém *conhecimento*. Isso está de acordo com o fato de que dois sujeitos podem ler o mesmo texto e a partir dele produzir (ou não) diferentes significados, ou mesmo, *conhecimentos* diferentes. Algo é "levado" pelo próprio sujeito ao se dispor a ler um texto.

A ação do sujeito perante uma determinada demanda que vem do outro (que pode ser até um grupo social amplo), para quem está buscando falar de modo adequado, de modo a ser entendido como aquele que responde àquela demanda.

Com a definição de *conhecimento* do MTCS é perfeitamente possível dizer que, por exemplo, dois sujeitos que estão produzindo significado para a mesma sentença _ "a derivada de x^2 é $2x$ " _ porém, um deles com justificação baseada na autoridade (é assim porque o professor disse) e o outro com justificação nos cálculos que fez usando a definição de derivada pelo quociente de Newton, constituem *conhecimentos* diferentes.[13]

---

[11] A *fala* pode ser também um falar consigo, uma espécie de fala interna _ consigo mesmo, e nesse caso, a própria pessoa é o *interlocutor* ou está representando-o abstratamente _. *Interlocutor* é qualquer agente que propicie o desenvolvimento psicológico do sujeito, não necessariamente uma pessoa. Cf. LINS (1994, p. 33).

[12] Nessa pesquisa consideramos ***enunciação*** como o ato de enunciar algo a algum interlocutor e, *discurso*, como uma enunciação ou um enunciado (resíduos de uma enunciação). Ambos utilizam, constantemente, um processo de inferência lógico dedutiva por meio da *linguagem*.

[13] Essa diferenciação citada, não é possível com a definição de *conhecimento* de modo clássico _ uma "*crença verdadeira justificada*" _, em que a justificação tem relação com a certeza do sujeito em dizer que conhece e não com a afirmação (com a garantia do sujeito em poder enunciá-la), sustentando conhecimento na categoria de uma proposição aceita. Logo, no exemplo anterior, se olharmos do ponto de vista da definição clássica de conhecimento, a enunciação _ "*a derivada de* x^2 *é* $2x$" _ *se torna* independente da justificação (tanto para o primeiro sujeito como para o segundo), os sujeitos têm certeza de poder dizer, e ambos teriam constituído o mesmo conhecimento, visto de modo absoluto, independente do método usado. Com o quê não concordamos.

Um papel da *justificação*, é o de produzir, para o *sujeito do conhecimento*, objetos _ "algo" do qual o sujeito fala a respeito _. Neste modelo, *objetos* são constantemente constituídos, embora por fazerem parte muitas vezes de *estipulações locais*, pareçam ter uma "existência permanente", ligada a nossa "realidade". Mas, o que estamos considerando por *estipulações locais* e *realidade* não compõem nenhuma realidade básica ou "apriori", mas são elementos na produção de versões de mundo que tomamos para construções subseqüentes, seguindo uma visão relativista de Nelson Goodman, citada por Bruner (1986, p. 99-104), na qual não existe uma "*realidade definitiva*", mas construções mentais projetadas em um "*mundo objetivo*", mundo este que não pode ser ontologicamente privilegiado como o mundo real, único, porque sempre temos uma versão de mundo (criado por outros) da qual partimos, construções das quais tomamos determinadas premissas como certas, as "*estipulações*".

No que se refere portanto às *estipulações*, o MTCS modifica essa noção a partir de Goodman, intensificando seu caráter não-permanente, uma vez que só considera sua criação em meio às atividades, denominando-as então de *estipulações locais* .

São as estipulações locais que vão constituir o que se denomina *núcleo* de um *modo de produção de significados*, isto é, *núcleo* de um *Campo Semântico* (**CS**). Portanto, núcleos de CS podem ser pressupostos de objetos (como propriedades e imagens), diagramas, princípios, axiomas, ou mesmo um enunciado. Em nossa pesquisa, em meio às atividades relativas a Cálculo (não previamente ou posteriormente), notamos alguns elementos que, devido à sua freqüência e importância como básicos na produção de significados, objetos e conhecimentos a partir do Cálculo, tiveram denominações especiais como estipulações locais em núcleos de CS:

- *Estipulações locais a respeito de limite* - quando se tem no núcleo a definição Weirstrassiana de limite de uma função de uma variável real, ou seja: dizemos que " $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$."
- *Estipulações locais a respeito de infinitésimos* _ quando se tem no núcleo elementos baseados na noção de infinitésimo _ a noção de infinitésimo como concebido desde Newton, de mônadas infinitesimais, de incrementos infinitamente pequenos; ou como para Leibniz (que dizia não serem números ou quantidades)

uma classe de números menores que qualquer outro designado, às vezes também expressos como diferenciais ou como distâncias infinitamente pequenas[14]; ou mesmo a noção de infinitésimo (mais recente) como número *hiper-real* cujo módulo é menor que de qualquer número real positivo;

- *Estipulações locais visuais-geométricas* - quando se tem no núcleo princípios ou resultados geométricos, gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais.
- *Estipulações locais do tipo algoritmos* - quando se tem no núcleo algoritmos: regras, fórmulas, seqüências memorizadas "de cor", sem relacionar ao entendimento e justificativa matemática.

Em seu domínio didático-pedagógico, o professor procura estratégias de organização das atividades dos alunos, de valorização de certas atitudes e de determinados discursos, sempre tendo em mente demandas que, (entre outras coisas) o fazem produzir significados em certos CS e a querer que o aluno também produza significados em CS análogos. Assim, novos núcleos são constituídos pelos estudantes em sala de aula de Cálculo, como por exemplo um núcleo tendo estipulações locais a respeito de limite ou tendo estipulações locais a respeito de infinitésimos.

Há casos, porém, em que o sujeito não consegue passar a operar em um novo CS, ou seja, em um novo modo de produção de significado, e não percebe a sua dificuldade. Uma "*impossibilidade de produção de significado para uma proposição em determinado CS*" (Lins, 1993), denomina-se de <u>limite epistemológico</u>.

Em outros casos, mesmo já tendo operado em um certo CS, tendo tomado aquele modo de produção de significado para outras proposições, o sujeito não consegue produzir significado mediante uma nova proposição (embora seja possível) em relação àquele modo. Este tipo de dificuldade, nos coloca diante de um <u>obstáculo epistemológico</u>.

Assim, a partir dessas caracterizações básicas _ atividade e produção de significados, enunciação e enunciado, interlocutor e demanda, conhecimento e sujeito do conhecimento, objetos e relações, estipulações locais e CS _ incluindo seus inter-relacionamentos, nos posicionamos quanto ao MTCS neste trabalho de pesquisa.

---

[14] Cf. em ALCOBA (1996, p.160) , LEIBNITZ (1983, p.7), e BARON (1985, v.3, p.28-34).

A PESQUISA DE CAMPO

Nossa opção foi por uma metodologia de pesquisa qualitativa que nos permitisse observar de modo a interferir o mínimo possível no dia-a-dia dos professores e alunos, principalmente em suas maneiras de falar e apresentar as idéias e soluções de problemas durante as atividades em Cálculo. Por isso escolhemos o processo metodológico de observação participante, implementada e aliada por: anotações sistemáticas em um caderno de campo, gravações e entrevistas do tipo centradas. [15]

Foram escolhidas para observação sistemática durante um ano, três turmas (uma de Física _ **T1** _, uma de Matemática _ **T2** _ e outra de Geologia _ **T3** _) todas de Cálculo inicial, por entendermos esse contexto mais propício à investigação de produção do pensamento diferencial e integral.

Os dados coletados : 1**.** entrevistas individuais (gravadas ou filmadas); 2**.** gravações de grupos de alunos em atividades em sala de aula de Cálculo; 3**.** soluções escritas de problemas (feitos individualmente ou em grupo); 4**.** observações escritas (caderno de campo) durante as aulas.

Nos procedimentos de análise desses dados, além do MTCS, também propusemos uma classificação de alguns deles em categorias sob certas distinções nas formas como esses dados se apresentavam. Porém, para fins deste artigo, exibiremos apenas uma das análises como amostra, e o faremos segundo o MTCS.

ATIVIDADE 1

Problema 1 - gravado (P1-G)

Calcular o $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Essa atividade de resolução do problema **P1-G** foi proposta pelos respectivos professores aos seus alunos nas três turmas de Cálculo observadas, sendo que: na turma de Física, foi possível gravação em fita cassete, enquanto que, nas outras duas turmas _ de

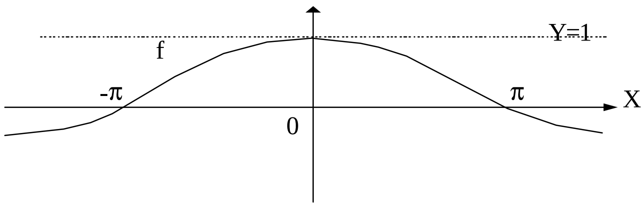
[15] Thiollent, apud Haguette (1990, p.77) diz que a **entrevista centrada** é aquela "*na qual, dentro da hipótese de certos temas, o entrevistador deixa o entrevistado descrever livremente a sua experiência pessoal a respeito do assunto investigado.*"

Matemática e Geologia _ a atividade foi descrita no caderno de campo pela pesquisadora durante a execução da mesma.

Na turma 1 (**T1**): Transcrevemos as partes que julgamos mais pertinentes a essa pesquisa.[16] Os alunos de **T1** (55 alunos do curso de Física) trabalharam durante quase todas as aulas de Cálculo I em grupos. No dia desta atividade, como de costume, estávamos em um desses grupos para observar e gravar as falas enquanto discutiam e resolviam as questões da ficha de atividades.

Falas e observações: Grupo de quatro alunos: **Jou**, **Nat**, **Raf**, e **Ped**; sendo que a pesquisadora (enquanto observadora), será designada, simplesmente, pela letra **O.**

Jou _ Fiz na calculadora e deu... Limite desse valor aí..., quanto mais zeros eu colocar mais perto vai chegar do valor no gráfico aqui [e aponta para a imagem no zero do gráfico que fez (sem preocupar-se com os zeros da função *f(x)* = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, ou com as escalas)].



Raf _ Mas nunca vai ser 1.

Nat _ Mas aí você está justificando por infinitésimos. Encaminhamento 3 [dado pelo prof. na folha de atividades] [este aluno já havia tentado calcular $\frac{\operatorname{sen} 0}{0}$ e visto a mensagem de ERRO na calculadora]

Raf _ Prá ser pelo gráfico tem que justificar porque vai ser 1.

Jou _ Eu tentei provar, eu juro que tentei com valores próximos de zero. Como vou provar?! Vou dizer que fiz na calculadora?

[Após algumas tentativas pelo gráfico e pela calculadora]

Jou _ Que dá 1 eu sei que dá 1. Mas, por que?

---

[16] As transcrições mais completas das atividades encontram-se nos Anexos do trabalho de tese (Sad. 1999).

[O aluno **A_3** não estava contente com a justificativa da aproximação pelo gráfico ou pela calculadora. Os outros três alunos do grupo tentam convencê-lo e a si mesmos.]

Raf _ Bom por exemplo eu vou jogar o valor Δx = 0,0001, e calcular $\frac{\operatorname{sen} 0{,}0001}{0{,}0001}$, é igual a 0, 9999998 [E continua a fazer cálculos com valores menores que 0,0001].

Raf _ Aí. Deu quase 1, cara!

Jou _ E, se a gente jogar um valor menor vai dar mais aproximado ainda.

Raf _ Vai dar mais noves ainda.

O - E, onde você está aqui? [Aponta para o gráfico que tem desenhado de $y = \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$]

Raf _ Me aproximando... quase em cima do zero, não dá nem para marcar aí o ponto. Conclusão: _ Dá 1. Dá 1 cara! (...)

[**Jou** diz de outro modo]

Jou _ Porque o seno de um ângulo pequeno é o próprio ângulo.

Raf _ É... Tem essa também.

Raf _ Vamos seguir o encaminhamento? A sugestão de **Jou** ?

[O prof. chega neste momento ao grupo, observa, e diz: "Se você fizer tudo bem pequenininho (aponta a figura do encaminhamento 3 que os alunos olhavam) você vai chegar a isso..." (aponta figura desenhada na mônada onde o seno do arco é o próprio arco)].

Raf _ Vamos dar esta explicação então.

Jou _ [Lê o que escreveu] Quando x é muito próximo de zero _ infinitésimos _, *sen* x é igual a x , e um dividido pelo outro é igual a 1.

Na turma 2 (**T2**) [Observações anotadas no caderno de campo]: Os alunos de **T2** (40 alunos de Matemática) trabalham individualmente nas atividades propostas pelo professor.

O professor inicia calculando, junto com a turma, o valor de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para alguns valores de x, cada vez menores. Diz o professor: "*Intuitivamente vemos que* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$", em que o adjunto adverbial de modo _ "*intuitivamente*" _ parece ter um significado literal de "sem rigor matemático suficiente a esse nível". [17]

Ele faz a demonstração que os livros de Cálculo I geralmente trazem, usando geometria e o "teorema do sanduíche".

A seguir os alunos resolvem outros limites parecidos onde podem usar este problema como dado, ou que também têm que usar o "teorema do sanduíche".

Na turma 3 (**T3**) [Observações anotadas no caderno de campo]: Os alunos de **T3** (33 alunos de Geologia) trabalham livremente, agrupados ou individualmente, nas atividades propostas pelo professor.

O professor pede que os alunos façam o gráfico de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ usando calculadora gráfica. Ao serem questionados sobre o problema do valor de f quando x é zero, olham o gráfico na calculadora e respondem que é 1; poucos (cerca de 6 alunos) tentam calcular valores de f para valores de x próximos de zero. Concordam em escrever que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, sem questionarem a indeterminação imediata do referido limite[18].

Análise em relação ao MTCS:

Na **T1,** vamos pontuar em cima dos enunciados transcritos das falas dos estudantes.

Apesar de na primeira fala de **Jou**, aparecer a frase "...quanto mais zeros eu colocar mais perto vai chegar do valor...", indicando uma certa aproximação, podemos observar que ele está se referindo só à questão gráfica, juntamente com **Raf,** tentando produzir significado a partir de *estipulações geométricas.* Só falam em mais aproximado ainda do valor 1 (um), referindo-se e apontando pontos no gráfico ou valores obtidos na calculadora relacionados ao gráfico; há uma nítida predominância do CS do visual-geométrico.

---

[17] A **intuição** em relação à Matemática, geralmente é usada para dizer que a mente humana pode desenvolver pensamentos que são baseados em imagens e noções próprias, isto é, não necessariamente dentro de um rigor matemático (ou seja, de um procedimento segundo as regras de um sistema gramatical da matemática _ a Lógica), embora possa ser um pensamento com bases lógicas. SegundoTall (1991, p.14): "*Intuição é o produto de imagens conceituais do indivíduo*", e, ainda à essa mesma página, fundamentado em concepções de Poincaré e de Fischbein, Tall reafirma que, intuições iniciais têm bases matemáticas *pré-formais* que vão sendo refinadas com o decorrer das experiências.

[18] Prática semelhante, com aplicação inclusive desta mesma função entre outras, encontramos em Baldino et al. (1996, p. 294-301).

Raf, fala o tempo todo tentando perseguir a idéia de estar "muito, muito próximo de zero", tentando conciliar as duas coisas (o numérico e o geométrico), mas achando difícil falar do numérico numa situação na qual o visual lhe é suficiente. É o primeiro a aderir à idéia sugerida nos encaminhamentos do professor sobre infinitésimos.

O aluno **Nat** parece sempre tentar descobrir qual o valor de $\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$ através de construção gráfica e de valores tabelados, inclusive se existe um valor para $\frac{\operatorname{sen} 0}{0}$. Fala muito pouco, e diz logo de início que estariam justificando por "infinitésimos", mas não podemos afirmar que estava produzindo significados em relação a um núcleo de infinitésimos, não exterioriza quase nada. Muito menos o aluno **Ped** , que só segue as instruções dos outros, concordando a cada afirmativa deles.

Finalmente, parecem se convencer do resultado e da justificativa por infinitésimos. Sendo que **Jou** manifesta seu entendimento falando aos demais: "*Quando x é muito próximo de zero _ <u>infinitésimos</u> _, sen x é igual a x e um divido pelo outro é igual a 1*". Como não há nenhuma propriedade mencionada (além da palavra "*infinitésimos*") que seja relativa à estipulações locais de infinitésimos e **Raf** fala de elementos numéricos querendo dar conta do que lhe é invisível e ao mesmo tempo óbvio graficamente, não podemos dizer que a produção de significados e de conhecimento passa a ser feita no *CS dos infinitésimos*. Resumindo, podemos dizer que o aluno **Jou** inicia com *estipulações geométricas* e que em conjunto com os demais no final da atividade passa ao *CS dos infinitésimos.* Já o aluno **Raf** parece estar sempre produzindo no *CS dos infinitésimos*.

Na **T2**, desde o início havia uma intenção do professor (que se evidenciou durante sua conduta de incentivo aos alunos) de mostrar que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ "se aproximava cada vez mais de 1, à medida que x se aproximava de 0", pensando como ele disse, "intuitivamente", e produzindo significados no CS do pensamento algébrico à medida que operava numericamente para mostrar esta aproximação juntamente com os estudantes que também assim agiam manuseando suas calculadoras.

Durante a demonstração formal do resultado proposto, o professor falou a partir de estipulações locais *de limite* (inclusive ao usar o teorema do "sanduíche" ou do "confronto" como é comumente denominado, ou seja, um resultado sobre funções que possuem um mesmo limite em um mesmo ponto) e de estipulações *visuais-geométricas* no cálculo de áreas, que permitem estabelecer as funções e as comparações (traduzidas em forma de equações) a serem usadas no teorema do “sanduíche”. Além do mais, falou a partir de outras estipulações algébricas e regras. Por isso, podemos dizer que produziu significados nos seguintes CS: de limite, visual-geométrico, do pensamento algébrico e dos algoritmos.

Contudo, não podemos dizer o mesmo dos estudantes que durante essa ação de exposição do professor permaneceram como espectadores, às vezes falando baixinho um com outro, não possibilitando observarmos o que ocorria em relação às falas deles.

Na **T3**, o modo de produção de significados dos alunos teve um núcleo constituído de *estipulações locais geométricas*, pois só faziam suas enunciações a partir das construções gráficas, tomando “janelas” em torno de x = 0 para observar o gráfico nas calculadoras. Inclusive ao responderem à questão do valor de f para $x = 0$: “*f(0) é um*” (sem titubear, sem qualquer enunciação a respeito da “impossibilidade” de se calcular o valor em $x = 0$). Como alguns poucos estudantes experimentavam valores numéricos pequenos para x, questionamos a dois deles, que responderam: “é para <u>ver</u> valores da função”. Infelizmente, não tivemos como averiguar mais o que pensavam e o que os faziam não colocar em suas tabelas um valor para a expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $x = 0$, às vezes deixado com um ponto de interrogação. Portanto os alunos parecem ter permanecido no CS do *visual-geométrico*. Todavia, não posso dizer o mesmo do professor (pelas observações particulares que me fez durante o transcorrer das atividades, nas quais incluiu os termos “se aproxima cada vez mais de...” e “limite é...”).

CONCLUSÕES E INDICATIVOS

Neste trabalho procuramos demonstrar que a produção de significados em meio às atividades da sala de aula de Cálculo destaca uma necessidade de compreensão das interrelações entre: **demanda social**, **sujeito do conhecimento** (prof. e aluno), **interlocutor**, **enunciado** (texto), **enunciação**, **conhecimento**, **CS** (em relação a estipulações), para que o ensino e aprendizagem se efetivem nas direções objetivadas.

Porém, observamos que, a predominância continua a ser do “ensino textual” (linha tradicional), cuja implicação direta são as ações didático/pedagógicas em termos do conteúdo a ser ensinado, o que não propicia reflexões do professor nem do aluno sobre o processo de aprendizagem, sobre o qual acreditamos que **aprender é aprender a produzir significado**. Dentro dessa concepção, uma ação constante do professor é a de investigar “de que modo e a partir de quê” o aluno está produzindo seus significados e conhecimentos, quais as suas necessidades de mudar de CS para que sua interação aconteça como desejado.

O MTCS além de mostrar-se adequado ao estudo histórico epistemológico, confirmou a existência de diversos modos de produção de significados a partir das atividades em Cálculo, permitindo exibi-los. A preocupação em ter esse modelo como base, embora propício às análises, foi com respeito ao controle necessário para que uma ênfase excessiva no foco epistemológico não provocasse um desligamento de outros fatores ou um “recorte” do estudante do quadro geral que envolve o processo de educação.

DIRECIONAMENTOS

- Atentar para as mudanças e relações entre CS. Buscar dialogar, compartilhando com o aluno de CS semelhantes.
- As diversificações na função semântica da linguagem nos textos matemáticos reforçam a necessidade de uma maior atenção à enunciação dos mesmos.
- Os objetos são produzidos a partir do Cálculo em meio a diferentes demandas, inclusive outros interlocutores além do professor.
- No processo de ensino-aprendizagem, destacar importância à fala dos alunos na análise de como e o quê estão aprendendo. Não tratar os significados distintos dos “oficiais” como erro ou falta.
- As metodologias de ensino influentes na produção de significados são as que se preocupam com a socialização dos significados, através de diálogos e críticas; são mais próprias às atividades em grupo, às interpretações de textos, narrativas, apresentações, nas quais o papel central é do aluno e não do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABBAGNANO, N. ***Diccionario de Filosofía***. 13 ed. Traduzido por Alfredo N. Galletti. México: Fondo de CulturaEconómica, 1996. Tradução de: Dizionario di Filosofia.

ALCOBA, M.L. ***La ley de continuidad en G. W. Leibniz***. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996.

ANGELO, C.L., CASSOL, A., SAD, L., SILVA, M.R.G. *Uma Análise do Teorema Fundamental do Cálculo em alguns livros-texto*. ***Quadrante: Revista teórica e de investigação***. V. 4. Lisboa: APM, 1995.

AYER, A.J.***The problem of knowledge***. UK: Penguin Books, 1986.

BAKHTIN, M. ***Marxismo e Filosofia da Linguagem***. 6.ed. Traduzido por Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. São Paulo:Hucitec, 1995.

BALDINO, R.R. *Cálculo Infinitsimal: passado ou futuro?* ***Temas , Debates*** , nº 6. SBEM, 1995a.

BALDINO, R. R., SAD, L..A., , TEIXEIRA, M.V.. ***Cauchy and the problem of pont-wise convergence***. Liège: Anais do XXth International Congress of History of Science, 1994.

BARON, M.E ***History of mathematics : origins and development of the calculus.*** Traduzido por José Raimundo B. Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes.Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BIBLIOTECA CULTURAL (Argentina). ***El Cálculo infinitesimal: Leibniz/Newton***. Buenos Aires: EUDEBA - Universitaria de Buenos Aires, 1977.

BICUDO, I. *Análise não-standard.* ***Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)***, n. 8, p. 60-67, 1992.

BOYER, C.B. ***The History of the Calculus and its Conceptual Development.*** New York: Dover Publications, 1959.

BRUNER, J. ***Actual minds, possible worlds***. Cambridge: Havard University Press, 1986.

BROUSSEAU, G., OTTE, M. *The fragility of knowledge* .***Mathematical knowledge: Its growth through teaching.*** Editado por Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S. , van Dormolen, J..*The fragility of knowledge.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., p. 13-36, 1991.

CABRAL, T.C.B**.** ***Vicissitudes da aprendizagem em um curso de Cálculo***. Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP-Rio Claro, 1883.

CASSOL, A.. ***Produção de significados para a derivada***. Dissertação de Mestrado apresentada na Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Rio Claro, 1997.

CORNU, B. ***Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstaculos.*** Tese de Doutorado apresentada em L'Universite Scientifique et Mdicale de Grenoble, 1983.

CHISHOLM, R.M. ***Theory of Knowledge***. 3 ed. New Jersey: Prentice-Hall International, 1989.

DAMEROW, P.. ***Abstraction and Representation: essays on the cultural evolution of thinking***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986.

GOODMAN, N. ***Of Mind and Other Matters****.* Cambridge: Havard University Press, 1984.

GRAY, E. M. , TALL, D. O.. *Duality, Ambiguity and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic.* ***Journal for Research in Mathematics Education****,* v. 25, nº 2, p. 116-140, 1994.

HAGUETTE, T. M. F. ***.Metodologias qualitativas na sociologia****.* Petrópolis: Vozes, 1990.

KLINE, M. ***Mathematical Thought: from ancient to modern times****.* New York: Oxford University Press,1990. v.1,2,3.

LEIBNITZ, G. W. ***Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal***. 6 ed. Traduzido por Jean Peyroux. Paris: Librairie A. Blanchard, 1983.

LEONTIEV, A. ***O desenvolvimento do psiquismo***. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LINS, R.C. ***A framework for understanding what algebraic thinking is.*** PhD Thesis. Inglaterra: University of Nottingham, 1992.

___*Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa.* ***Revista da SBEM-SP,*** nº 1. São Paulo, 1993.

___*O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.* ***Revista Dynamis***, v.1, nº 7. Blumenau: FURB, 1994.

___*Struggling for survival: the producition of meaning*. ***Anais do BSRLM*** Meeting Sheffild, 1996.

NEWTON, I. ***Principia***. Traduzido por Andrew Motte, 1729. 2 ed. Revisada por Florian Cajori. Berkeley: University of California Press, 1962. 2v.

PRADO JR., C. ***Notas Introdutórias à Lógica Dialética***. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1961.

REZENDE, W.M. ***Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite***. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: USU, 1994.

SAD, L. A. ***Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos***. Tese de Doutorado (em Educação Matemática) apresentada na Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 1998.

SIERPINSKA, A. *Humanities students and Epistemological Obstacles related to Limits*. ***Educational Studies in Mathematics***, v. 18, p. 371-397, 1987.

___ *Some remarks on understanding in mathematics, for the learning of mathematics.* ***Recherches en Didactique des Mathématiques***, v.10, nº 3, p.24-36, 1990.

SILVA, M. R. G. da. ***Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática.*** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 1993.

STROYAN , LUXEMBURG. ***Introduction to the theory of infinitesimals***. New York: Academic Press, 1976.

TALL, D. ***Advanced Mathematical Thinking***. London: kluwer Academic Publishers,1991.

___ *The notin of infinite masuring numbers and its relevance in the intuition of infinity*. **Educational Studies in Mathematics**, v.11, p.271-174, 1980b

___*Intuitive infinitesimal in the calculus*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. UK, 1981.

TALL , VINNER.. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. **Educational Studies in Mathematics**,v. 12, p.151-169, 1981.

VYGOTSKY, L.S. ***A Formação social da mente***. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

___ *Obras escogidas*. Madrid: Visor Distribuiciones, 1991a. 3 volumes.

___ *Pensamento e Linguagem*. Traduzido por J.L.Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

WALKERDINE, V. ***The mastery of reason***. New York: Routledge, 1988.